Schon bald keine Fünfen mehr in Mathe – kein Widerspruch: In Mathematik dürfen Schüler*innen machen, was sie wollen!

So schön, wie diese Aussage wohl klingen mag, muss ich Sie leider enttäuschen. Damit ist nicht gemeint, dass wir die uns bekannten Regeln der Mathematik in Zukunft nicht mehr befolgten müssen. Ganz im Gegenteil: Ihr Horizont der Mathematik und dessen Regeln sollen sich in diesem Artikel erweitern und Ihnen somit einen tiefen Einblick in die Philosophie der Mathematik gewähren.

Seit Jahrtausenden stellen "schlaue Köpfe" mathematische Regeln und Gesetze auf, die wir in der Schule kennen und zu gebrauchen lernen. Diese Regeln beruhen auf Axiomen, die vom Menschen selbst "erfunden" wurden und keinen Beweis benötigen, weil sie eindeutig sind. Nun gibt es natürlich unter den vielen verschiedenen Köpfen, die sich ausgiebig mit der Mathematik beschäftigen, unterschiedliche Meinungen darüber, wie wir die Mathematik auszulegen haben. Galilei war der Überzeugung, dass die Mathematik in der Natur zu finden sei – sie sei greifbar. Dies müsste gleichzeitig bedeuten, dass alles, was die mathematische Sprache formuliert auch eine Entsprechung in der Wirklichkeit findet. Einstein schlägt einen anderen Weg ein und sagt, dass die Mathematik versucht, die Natur mit Modellen zu beschreiben. Jedoch kann kein Modell die Natur eindeutig beschreiben und deshalb kann ein Vorgang der zu 100% mathematisch vorhergesehen werden kann, kein natürlicher Prozess sein. Hilbert, einer der größten Mathematiker seiner Zeit, betrachtete die Mathematik als eine Kunst und als eine Wissenschaft, die ihren Wert auch unabhängig von ihrer Anwendung hat. Dieser verlieh dem Lösen von mathematischen Problemstellungen einen ästhetischen Wert und sah darin einen Sinn in der Beschäftigung mit der Mathematik. Er meint zudem, dass sich die Mathematik nur weiterentwickelt, wenn sich nicht an ihrer Anwendung orientiert. Mit dieser Behauptung grenzte er sich von anderen Mathematikern wie Galilei ab, da er die Mathematik nicht nur in der Natur fand. Russel hingegen, wirkt der Mathematik in ihrer Richtigkeit gegenüber nicht völlig überzeugt, da diese, wie oben schon erwähnt, auf von Menschen konstruierten Axiomen basiert, deren Richtigkeit nicht angezweifelt werden kann oder braucht, da wir sie so akzeptieren, weil sie zu unserer Anschauung passen und deshalb evident erscheinen. Daher kann aber nie sichergestellt sein, dass ein Beweis, der auf diesen Axiomen beruht, auch eindeutig wahr ist.

Um Russels Gedanken weiterzuführen: Die Mathematik ist ein in sich widerspruchs-freies System, das versucht die Natur und die Wirklichkeit zu verstehen und darzustellen. Nehmen wir an, dass die Natur weit über die Logik des menschlichen Verstandes überragt, könnte es sein, dass alles, was wir als glaubhaft ansehen, nicht der Wahrheit entspräche.

Um diesen Gedankengang zu verstehen muss man sich von der, lassen Sie mich diese als allgemeine Mathematik bezeichnen, trennen und mich Ihnen Konstrukte vorstellen, die wahrscheinlich von
Ihrem mathematischen Verständnis abweichen:

Vielleicht sind Sie in Ihrer Suche nach mathematischen Herausforderungen mal auf Restklassen gestoßen. Ohne zu tief in die Welt der Mathematik abzutauchen und Beweise dieser Aussage zu finden, lässt sich mit diesen Restklassen ganz einfach beweisen, dass die Rechnung von $4 + 3 = 0$ ergibt. Das bedeutet aber nicht, dass das eigentlich erwartete Ergebnis 7 falsch ist. In diesem Fall befinden wir uns in einem anderen Konstrukt, das aber wiederum genau wie das der natürlichen Zahlen funktioniert und ohne Widerspruch seine Daseinsberechtigung hat.

Des Weiteren lässt sich die verbreitete euklidische Geometrie, die der Ebene und des Raumes, mit der sphärischen Geometrie, die auf der Oberfläche einer Kugel besteht, völlig auf den Kopf stellen. In dieser Geometrie gibt es keine Parallelen, was unser vorheriges Verständnis der Geometrie durcheinanderbringt. So kann hier die Innenwinkelsumme eines Dreiecks zwischen 180° und 540° betragen. Da aber nur das Parallelaxiom bei der Liste der herrschenden Axiome nicht gilt, kann auch hier kein Widerspruch gefunden werden.

Jetzt stellen sich viele Fragen: Welcher dieser Rechenwege ist richtig? Oder welchem dieser Rechenwege könnte man noch trauen? Obwohl diese Fragen einen langen Diskurs vermuten lassen, kann mit Überzeugung behauptet werden, dass weder eine der beiden richtiger oder gar falsch sei. Beide beruhen auf den anerkannten Axiomen und sie unterscheiden sich zwar in ihrem System, aber niemals darin, dass in ihrem System ein Widerspruch gefunden werden kann. So kann gesagt werden, dass jedes der mathematischen Konstrukte gleichwertig und richtig ist.

Um einen Bezug zur Schlagzeile dieses Berichtes zu erlangen, kann gesagt werden, dass solange eine Rechnung oder ein Rechenweg auf die anerkannten Axiome zurückzuführen ist und in dem gerechneten System kein Widerspruch zu finden ist, “ein Schüler machen darf, was er will!” Er widerspräche nämlich nicht der Mathematik.